Lezione2 c1

martedì 3 marzo 2026 12:55

Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Ricordo

Teorema: Ogni numero in $\mathbb{Q}$ ha rappresentazione decimale o finita oppure infinita periodica, e vale il viceversa.

Abbiamo visto come scrivere un numero $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ in forma decimale, attraverso la divisione

Vediamo, ora, come scrivere un numero in forma decimale (finita o infinita periodica) in forma fratta

Es

$$1,36 = \frac{136}{100} = \frac{34}{25}$$

$$2,\underbrace{5}_{\text{antiperiodo}}\underbrace{\overline{12}}_{\text{periodo}} = \frac{2512-25}{990} =$$

$$= \frac{2487}{990}$$

Es

$$2,\underbrace{5}\underbrace{\overline{9}} = \frac{259-25}{90}$$

Regola in generale -

Chiamo periodo la parte numerica che si pone sotto il periodo, mentre chiameremo antiperiodo la parte numerica che sta dopo la virgola prima del periodo

Dato un numero decimale fratto, se tale rappresentazione è finita, si riporta in forma fratta mettendo a frazione l'intero numero senza la virgola diviso da 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola

Se invece la rappresentazione decimale è infinita periodica si riporta in forma fratta mettendo a frazione la differenza dell'intero numero senza la virgola e senza periodo meno le cifre che non sono nel periodo diviso da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Insieme dei Numeri reali

$$\mathbb{R} = \left\{ a, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots \quad , \quad \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \\ a_0, a_1 \dots \in \{0, \dots 9\} \end{array} \right\}$$

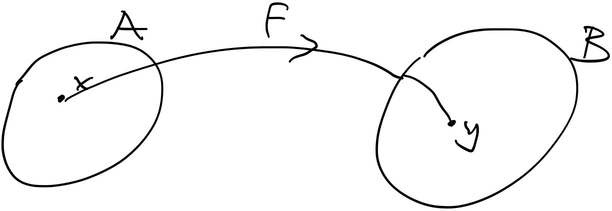
Ovviamente

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Def Siano A e B due insiemi

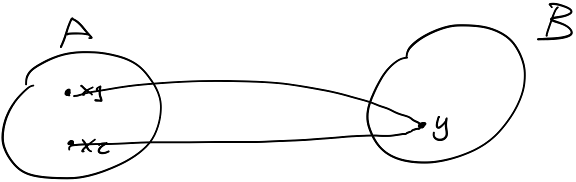
Una funzione $f: A \longrightarrow B$ (dall'insieme

A all'insieme B) è una legge che associa ad ogni elemento di A un ed un solo elemento di B



Def 1 Una funzione $F : A \to B$ si dice iniettiva se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B attraverso F

Es



Non è funzione iniettiva

Es $A = \{$ studenti Bio C1 $\}$

$B = \mathbb{N}$

$\forall a \in A$ $f(a) =$ voto maturità di a

tale funzione non è iniettiva, poichè ci sono almeno 2 studenti con voto 100!

<u>Def 2</u> Sia $f: A \to B$ una funzione. essa si dice <u>suriettiva</u> se

$$\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$$

<u>Es</u> precedente

$A = \{$studenti B, o C1$\}$

$B = \mathbb{N}$

$f(a) =$ voto maturità a

$$f: A \longrightarrow B$$

Tale funzione non è suriettiva poichè

$59 \in \mathbb{N}$ non può essere voto di maturità di qualche studente

Def Una funzione $f: A \to B$ si dice biettiva se essa è iniettiva + suriettiva

Osserviamo, se $f: A \to B$ è suriettiva allora se $y \in B$ dalla suriettività abbiamo un $x \in A$: $f(x) = y$

Notiamo però che tale $x \in A$ è unico (per l'iniettività). Ossia ad ogni $y \in B$ associamo uno ed un solo elemento $x \in A$: $f(x) = y$

Stiamo così definendo una nuova funzione chiamata funzione inversa di f

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

Def (successione)

Una successione su $\mathbb{R}$ è una particolare funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a_n \in \mathbb{R}$$

Es $\quad f(n) = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$1 \longmapsto 1$$

$$2 \longmapsto \frac{1}{2}$$

$$3 \longmapsto \frac{1}{3} \quad - - -$$

Usualmente una successione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ viene direttamente denotata con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ossia $\quad a_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Def Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = A_0^{(n)}, A_1^{(n)} A_2^{(n)} A_3^{(n)} \dots A_k^{(n)} \dots$$

Diremo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è stabilizzata se

$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists c_k \in \mathbb{N}$:

$$A_k^{(n)} = A_k^{(n+1)} \qquad \forall n \geq c_k$$

In tal caso, se chiamo

$$A_k = A_k^{(n)} \qquad \forall n \geq c_k$$

ho creato un unico numero reale

$$a = A_0, A_1 A_2 A_3 \dots$$

Diremo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si stabilizza verso a e si indica

$$a_n \hookrightarrow a$$

Lemma Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali positivi tale che

(i) $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(ii) $\exists\, M\in\mathbb{N} \; : \; a_n \leq M \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Allora la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è stabilizzata.

Come fare somma fra due numeri reali

Osserviamo che sappiamo sommare due numeri in $\mathbb{Q}$

$$\frac{p}{q} + \frac{n}{m} = \frac{pm+qn}{q\cdot m} \in \mathbb{Q}$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$

$a = A_0, A_1 A_2 A_3 \ldots$

$b = B_0, B_1 B_2 B_3 \ldots$

$\forall n \in \mathbb{N}$ considero

$$\left.\begin{aligned} a_n &= A_0, A_1 A_2 \dots A_n \\ b_n &= B_0, B_1 B_2 \dots B_n \end{aligned}\right\} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \quad a_n + b_n \in \mathbb{Q}$$

ci si accorge che $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica le ipotesi del lemma precedente :

(i) $\quad a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1}$

(ii) $\quad a_n + b_n \leq a_0 + b_0 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione stabilizzata , e si stabilizza verso un numero reale che chiameremo

$$a+b \in \mathbb{R}$$

Analogamente si definiscono le operazioni $-$, $\cdot$, $:$ in $\mathbb{R}$

Ordinamento in $\mathbb{R}$

siano $a, b \in \mathbb{R}$

con $a = A_0, A_1 A_2 A_3 \dots A_k \dots$

$b = B_0, B_1 B_2 B_3 \dots B_k \dots$

l'ordinamento in $\mathbb{R}$, detto ordinamento lessico-grafico ci dice che $a \le b$

se e solo se

(i) se $A_0 < B_0 \Rightarrow a \le b$

(ii) se invece $A_0 = B_0$,

se $A_1 < B_1 \Rightarrow a \le b$

(iii) se $A_1 = B_1$, allora

se $A_2 < B_2 \Rightarrow a \le b$

e così via!

Es $a = 1,25 = 1,25000000$

$b = 1,2\overline{5} = 1,25555\ldots$

$\Rightarrow a < b$

Es $a = \frac{1}{5}$

$b = \frac{2}{7}$

Modo 1 (In forma fratta)

$\frac{1}{5} < \frac{2}{7}$?

moltiplicando ambo i membri per 5 e per 7

(non cambia il verso della diseq. poiché sono positivi!)

si ha $1 \cdot 7 < 2 \cdot 5$

$7 < 10$ sì

Deduciamo che $\frac{1}{5} < \frac{2}{7}$

<u>Modo 2</u> (In forma decimale)

```
1  |_5
10   0,2
10
//
```

$$\boxed{\frac{1}{5} = 0{,}2}$$

```
2  |_7
20   0,285714
14
60
56
40
```

$$\Rightarrow \frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \hline \textcircled{5}\,0 \\ 49 \\ \hline \textcircled{1}\,0 \\ 7 \\ \hline \textcircled{3}\,0 \\ 28 \\ \hline \textcircled{2} \end{array}$$

$\Longrightarrow \quad \frac{1}{5} < \frac{2}{7}$ dall'ordinamento lessico-grafico

Proposizione L'ordinamento lessico-grafico su $\mathbb{R}$ definisce una relazione di ordine parziale (riflessiva + antisimmetrica + transitiva)

Teorema $(\mathbb{R}, \leq)$ è totalmente ordinato

Proprietà .

(1) $x \leq y \implies x+z \leq y+z \quad \forall z \in \mathbb{R}$

(2)
$$\begin{tikzcd} & x \cdot z \leq y \cdot z \quad \text{se } z>0 \\ x \leq y \implies \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & x \cdot z \geq y \cdot z \quad \text{se } z<0 \end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{tikzcd} & \frac{x}{z} \leq \frac{y}{z} \quad \text{se } z>0 \\ x \leq y \implies \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \frac{x}{z} \geq \frac{y}{z} \quad \text{se } z<0 \end{tikzcd}$$

(4)
$$\left.\begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \implies x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$$

(5) $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 = 0 \iff x = 0$

(6)
$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq y_1 \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \implies x_1 x_2 \leq y_1 y_2$$

(7) se $\boxed{x, y > 0}$

$$x \leq y \iff \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$$

Valore assoluto

Sia $x \in \mathbb{R}$ si definisce il valore assoluto di x come

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Nota: Il valore assoluto è un'operazione che ha senso per tutti i numeri reali (non ha vincoli di esistenza)

Ogni qualvolta trovate un $|A(x)|$ vanno esplicitati due casi:

Caso 1 $A(x) \geq 0$ (e si toglie il v.a.)

caso 2

$A(x) < 0$ (e si toglie il v.a. mettendo un segno $-$)

Proprietà:

(1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| = 0 \iff x = 0$

(2) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare)

(3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \boxed{y \neq 0}$

Intervalli in $\mathbb{R}$

se $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a < b$

Definiamo

(1) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$a, b \in [a, b]$

(2) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$a \notin]a, b]$

(3) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

(4) $]b, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$

Estremi di un insieme

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto

diremo che $\boxed{m \in A}$ è elemento minimo per A se accade

$$m \leq a \quad \forall a \in A$$

diremo che $\boxed{M \in A}$ è elemento massimo pr A se accade

$$a \le M \qquad \forall a \in A$$

Attenzione : non è detto che un insieme sia dotato di minimo e/o di massimo

Def sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che A è

① **limitato superiormente** se $\exists \boxed{c \in \mathbb{R}}$ tale che $a \le c \qquad \forall a \in A$

② **limitato inferiormente** se $\exists c \in \mathbb{R}$:

$$c \le a \qquad \forall a \in A$$

Def sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. Diremo che $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ è maggiorante per A se

$$a \le x \qquad \forall a \in A$$

Definiamo

$$A^* = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è maggiorante per } A\}$$

<u>OSS</u> Poiché A è limitato superiormente, dalla definizione segue che $A^* \neq \emptyset$

si prova che A^* ammette elemento <u>minimo</u>

se $\boxed{a = \min A^* \in \mathbb{R}}$

che è maggiorante per A, esso viene definito come l'<u>estremo superiore</u> di <u>A</u>

$\boxed{\sup A}$

<u>DEF</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente, $x \in \mathbb{R}$ si dice <u>minorante</u> per A se

$$x \leq a \quad \forall a \in A$$

e consideriamo

$$A_* = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è minorante per } A\}$$

Oss Poichè A è limitato inferiormente

$$\Rightarrow \quad A_* \neq \emptyset$$

si prova che l'insieme A_* ammette elemento massimo

$$d = \max A_*$$

si definisce estremo inferiore di A come tale $\max A_*$ e lo indicheremo

$$\boxed{\inf A}$$

Oss (differenza tra $\max A$ e $\sup A$)

(1) Il $\max A$ può non esistere, mentre il $\sup A$ esiste sempre (se A è limitato superiormente)

(2) Se accade che $a = \sup A \in A$

$$\Rightarrow \quad a = \max A$$

Analogamente

(3) se $\quad d = \inf A \in A$

$$\Rightarrow \quad d = \min A$$

Notazione: Nel caso in cui l'insieme A non è limitato superiormente, scriveremo brevemente

$$\boxed{\sup A = +\infty}$$

ciò significa

$$\boxed{\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists\, \bar{a} \in A \quad : \quad c \leq \bar{a}}$$

Analogamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato inferiormente, scriveremo

$$\boxed{\inf A = -\infty}$$

ciò significa

$\forall c \in \mathbb{R} \quad \exists \bar{\bar{a}} \in A : \quad \bar{a} \leq c$

L'esistenza di inf A e sup A per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ lim. inf rispett. lim. sup. viene anche detto che $\mathbb{R}$ è completo secondo Dedekind

Prop (caratteristiche del sup)

sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente

Allora $a = \sup A$ se e solo se valgono

(1) $a \leq c \quad \forall a \in A$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x < c \quad \exists a \in A :$

$x \leq a \leq c$

Prop (caratteristiche dell'inf)

sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente. Allora

$d = \inf A$ se e solo se valgono

(1) $d \leq a \quad \forall a \in A$ (d è minorante)

(2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x > d \quad \exists a \in A$

$$d \leq a \leq x$$

<u>Dimostriamo</u> (sup)

$(\Longrightarrow)$ (Ip) $c = \sup A$

(Tesi) c verifica (1) + (2)

<u>Ipotesi</u> $c = \min A^*$

essendo elemento minimo $\Longrightarrow c \in A^*$

$\Longrightarrow$ c è maggiorante per A

$\Longrightarrow \quad a \leq c \quad \forall a \in A \quad (1)$

Proviamo la (2)

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x < c = \min A^*$

$\Longrightarrow x \notin A^*$ (poiché altrimenti c non sarebbe min)

$\Longrightarrow$ x non è maggiorante per A

$$\Longrightarrow \exists\, \bar{a} \in A : \quad x \le \bar{a} \underset{(1)}{\le} c$$

Viceversa

$(\Longleftarrow)$

(Ip) c verifica (1) + (2)

(Tesi) $c = \min A^*$

Per ipotesi (1) $\Longrightarrow c \in A^*$

Proviamo che $c = \min A^*$ attraverso (2)

supponiamo per assurdo, che $c \neq \min A^*$

$$\Longrightarrow \exists\, \boxed{x \in A^*} : \quad x \lneq c$$

Dalla (2) $\exists\, a \in A$:

$$\underbrace{x \le a}_{\Downarrow \; \boxed{x \notin A^*}} \le c$$

$$\#$$